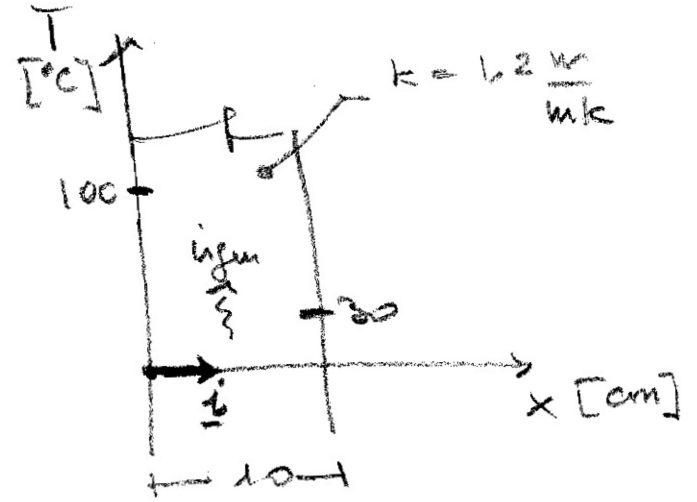
La parete illustrata in figura è soggetta a BC di I tipo su entrambe le facce e a generazione uniforme pari a $4 \cdot 10^4$ W/m^3.
Si determini la massima temperatura raggiunta della lastra ed il flusso uscente sulle 2 facce.

1_SOLUZIONE DIMENSIONALE



$$\begin{cases} (1) \quad \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\dfrac{i_{gen}}{k} \\ (2) \quad T(0) = T_0 = 100 \\ (3) \quad T(L) = T_L = 30 \end{cases}$$

Integrando la (1) segue

$$T(x) = -\frac{i_{gen}\, x^2}{2k} + \frac{T_L - T_0}{L}\, x + \frac{i_{gen}\, L\, x}{2k} + T_0 \qquad (4)$$

La distribuzione di temperatura essendo parabolica, il flusso termico varia linearmente con x:

$$\dot{Q}(x) = -k A \frac{\partial T}{\partial x} = -k A \left[-\frac{i_{gen}}{k}\, x + \frac{T_L - T_0}{L} + \frac{i_{gen} L}{2k} \right] \qquad (5)$$

Si noti che la funzione $\dot{Q}(x)$ esprime il flusso termico lungo la direzione x nel verso positivo; infatti

FLUSSO TERMICO VETTORE SPECIFICO

$$\dot{Q}(x) = +A\, \underline{\dot{q}} \cdot \underline{i} = +A \left[-k \frac{\partial T}{\partial x}\, \underline{i} \right] \cdot \underline{i} = -k A \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (6)$$

VERSORE ASSE X

NB: con il simbolo A si è denotata l'area trasversale della lastra assunta pari a 1 m^2

Al fine di determinare T_{max} si deriva la (4):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{u_{gen}}{k} x_{max} + \frac{T_L - T_0}{L} + \frac{u_{gen} L}{2k} = 0$$

$$\frac{\cancel{K} m^3 W}{W\ \cancel{m}\ m\ K}$$

$$x_{max} = \frac{+\frac{u_{gen} L}{2k} + \frac{T_L - T_0}{L}}{\frac{u_{gen}}{k}} = \frac{L}{2} + \frac{k}{L}\frac{T_L - T_0}{u_{gen}} \qquad (7)$$

si nota come il massimo è spostato, rispetto alla mezzeria della lastra verso la faccia più calda.

$$T_{max} = T(x_{max}) = -\frac{u_{gen} x_{max}^2}{2k} + \left[\frac{T_L - T_0}{L} + \frac{u_{gen} L}{2k}\right] x_{max} + T_0 \qquad (8)$$

Infine il flusso USCENTE si può calcolare con riferimento alla (5):

$\underline{x=0}$ $$\dot{Q}_0^{USCENTE} = -\dot{Q}(0) = +kA\left[\frac{T_L - T_0}{L} + \frac{u_{gen} L}{2k}\right] \qquad (9)$$

si noti che il I addendo è il flusso dovuto allo squilibrio termico sulle 2 facce e coincide con quello relativo alla lastra in assenza di generazione. Viceversa, il II addendo è quello legato alla generazione.

$\underline{x = L}$ $\quad \dot{Q}_L^{USCENTE} = +\dot{Q}(L) = -kA\left[-\dfrac{u_{gen} L}{k} + \dfrac{T_L - T_0}{L} + \dfrac{u_{gen} L}{2k}\right] =$

$$= +kA\left[+\frac{u_{gen} L}{2k} + \frac{T_0 - T_L}{L}\right] \qquad (10)$$

Si noti infine che, estendendo un bilancio di energia a $\underline{tutte}$ le lastre può scriversi:

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial U}{\partial t}}}_{\text{HP. di stazionarietà}} = 0 = -\dot{Q}_0^{USCENTE} - \dot{Q}_L^{USCENTE} + \int_V \dot{u}_{gen}\, dV \qquad (11)$$

I SEGNI "−" SCATURISCONO DALL'ESSERE I FLUSSI USCENTI

$$\left|Q_0^{USC}\right| + \left|Q_L^{USC}\right| = \dot{u}_{gen} \cdot \underbrace{AL}_{\text{VOLUME DELLA LASTRA}} \qquad (12)$$

il bilancio, sfruttando le (9) e le (10), risulta verificato.

Passando ai numeri

(7) $\Rightarrow$ $x_{max} = 0{,}029\ m$

(8) $\Rightarrow$ $T_{max} = 114\ °C$

(9) $\Rightarrow$ $\dot{Q}_0^{USC} = 1160\ W$

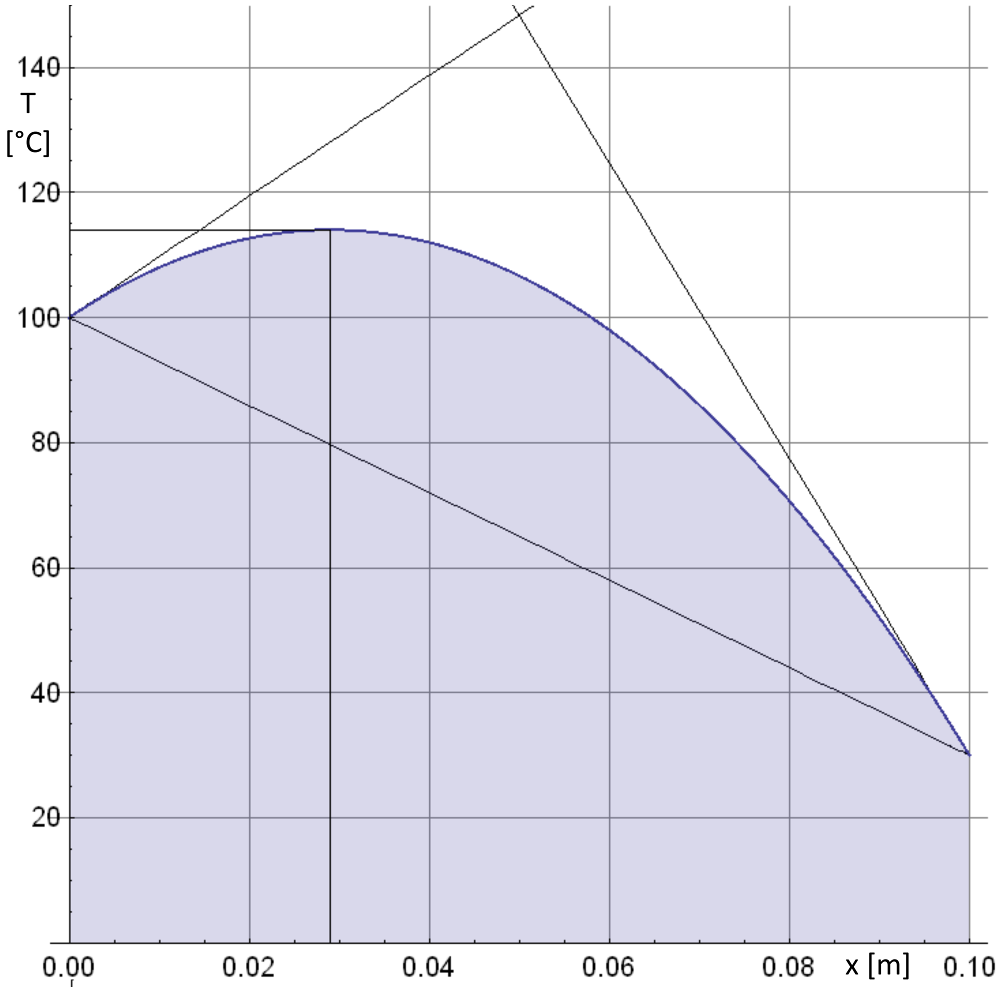
(10) $\Rightarrow$ $\dot{Q}_L = 2840\ W$

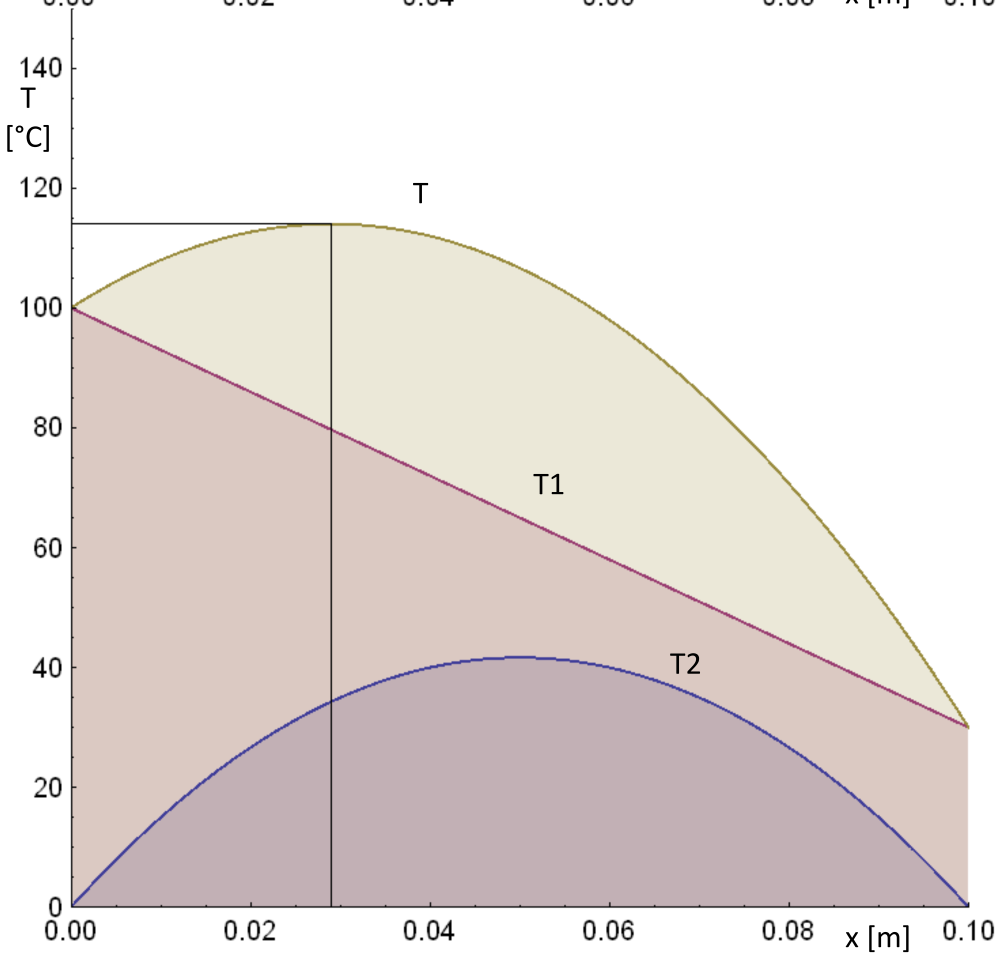
CONTROLLO:

si verifica le (11)

$\sum Q^{USC} = 1160 + 2840 = 4000\ W$

$U A L = 4 \cdot 10^4 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 4000\ W$


140
T
[°C]
120
100
80
60
40
20
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
x [m]
0.10


140
T
[°C]
120
T
100
80
T1
60
40
T2
20
0
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
x [m]
0.10

2. SOLUZIONI PARZIALI

Il problema dato dalle eq. (1) ÷ (3) si può scindere in sottoproblemi ognuno dei quali si fa carico di un numero ridotto di non-omogeneità. In tal modo, pur essendo aumentato il numero di problemi da risolvere, il singolo sottoproblema è più semplice.

Scelta una struttura del tipo: $T(x) = T_1(x) + T_2(x)$ le (1) ÷ (3) si riscrivono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = -\dfrac{\dot{u}_{gen}}{k} & (1') \\ T_1(0) + T_2(0) = 100 & (2') \\ T_1(L) + T_2(L) = 30 & (3') \end{cases}$$

Le (1') ÷ (3') sono verificate se lo sono contemporaneamente le seguenti

$$① \begin{cases} \dfrac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = 0 & (1'') \\ T_1(0) = 100 & (2'') \\ T_1(L) = 30 & (3'') \end{cases} \qquad ② \begin{cases} \dfrac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = -\dfrac{\dot{u}_{gen}}{k} & (1''') \\ T_2(0) = 0 & (2''') \\ T_2(L) = 0 & (3''') \end{cases}$$

Il problema ① è "già risolto":

$$T_1(x) = T_0 + \frac{T_L - T_0}{L} x \qquad (4''')$$

Integrando 2 volte la $(1''')$ e imponendo le BC $(2''')$ e $(3''')$ segue

$$T_2(x) = \frac{u}{2k}\, x\,(L-x) \qquad (5''')$$

Come si vede i due sottoproblemi sono più semplici di quello di partenza _ Sommando i due profili $(4''')$ e $(5''')$ si ottiene il profilo (4) _ Anche per il flusso si può pervenire ad analoghe conclusioni_

3- problema adimensionale

posto $x_{rif} = L$ e $\Delta T_{rif} = T_L - T_0$

segue: $\xi = x/L$ e $\theta = (T-T_0)/(T_L - T_0)$

$$\frac{\Delta T_{rif}}{L^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} = -\frac{u_{gen}}{k} \longrightarrow \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} = -\left[\frac{L^2}{2\,\Delta T_{rif}}\,\frac{u_{gen}}{k}\right]2 = -a\,2 \qquad (13)$$

a

avendo inserito il "2" per comodità come sarà chiaro in avanti_ Le due BC sono

$$\theta(0) = 0 \qquad (14)$$

$$\theta(1) = 1 \qquad (15)$$

integrando la (13) si ha

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi} = -2a\xi + c_1 \qquad (16)$$

$$\theta = -\cancel{2}a\frac{\xi^2}{\cancel{2}} + c_1\xi + c_2$$

Si noti che il "2" nella (13) è stato messo per la convenienza di poter operare la semplificazione appena fatta – La sol. generale è

$$\theta(\xi) = -a\xi^2 + C_1\xi + C_2$$

$$\theta(0) = 0 = -a\cdot 0 + C_1\cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\theta(1) = 1 = -a\cdot 1 + C_1\cdot 1 \Rightarrow C_1 = 1+a$$

La sol. particolare è

$$\theta(\xi) = -a\xi^2 + (1+a)\xi \qquad (17)$$

Si noti che la funzione appena trovata è universale, vale cioè per tutte le "piastre del mondo" soggette alle BC di primo tipo e con generazione – Poichè la funzione dipende, oltre che dalla variabile indipendente ξ, da a si può graficare in generale prescindendo dal caso in esame (V. FIGURA ALLEGATA PAG. 7) Si noti che a può assumere valori positivi o negativi in dipendenza del segno di ΔT_{inf} – Ovviamente il caso $a=0$ corrisponde ad assenza di generazione –

Ma cosa rappresenta a?

Per ottenere questa risposta si può valutare il valore medio di θ:

$$\bar{\theta} = \int_0^1 \theta\, d\xi = \frac{1}{2} + \frac{a}{6} \Rightarrow 6\left[\bar{\theta} - \bar{\theta}^*\right] = a \qquad (18)$$

avendo osservato che $\bar{\theta}^* = \frac{1}{2}$ è la temperatura media in assenza di generazione – Si può concludere quindi che a rappresenta una misura di quanto la temperatura media adim. (

si $\alpha = 0$ discosta dal valore medio in assenza

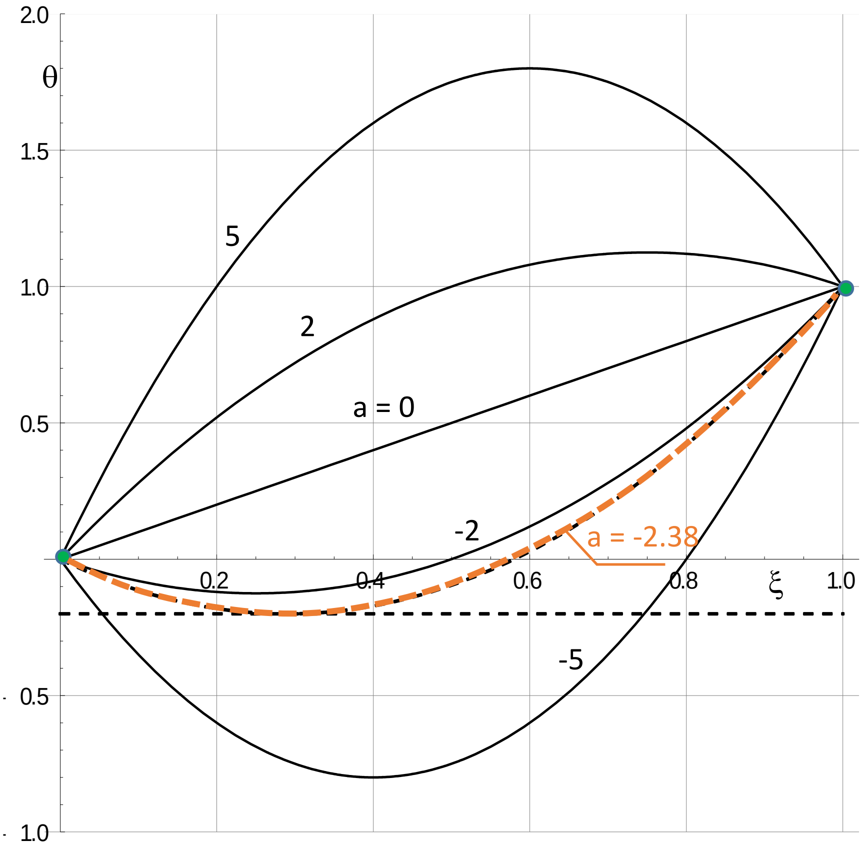
di generazione. In termini dimensionali

$$6\left(\frac{\bar{T} - \bar{T}^*}{\Delta T_{rif}}\right) = a \Rightarrow 6(\bar{T} - \bar{T}^*) = \frac{u_{gen} L^2}{2k} \qquad (19)$$

in questo caso, cioè in termini dimensionali;

lo scarto tra $\bar{T}$ e $\bar{T}^*$ è sempre positivo.

In figura sono rappresentate le curve per $a = 0$, $a = \pm 2$ e $a = \pm 5$ nonché, con linea tratteggiata il valore corrispondente al problema in esame, $a = -2{,}38$.



Si può, in maniera naturale definire un flusso termico adimensionale q^+:

$$q^+ = \frac{\dot Q}{\dot Q_{rif}} = \frac{-kA}{\dot Q_{rif}}\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{kA}{\dot Q_{rif}}\frac{\Delta T_{rif}}{L}\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \qquad (20)$$

appare chiaro che è conveniente scegliere

$$\dot Q_{rif} = -kA\frac{\Delta T_{rif}}{L} \qquad (21)$$

La (20) allora diventa $q^+ = \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$ $\Rightarrow$

$$q^+ = -2a\xi + 1 + a \qquad (22)$$

Essendo $\dot Q_{rif}$ interpretabile come il flusso attraverso la lastra in assenza di generazione, $q^+ = 1$ significa riferirsi a quest'ultimo caso in termini adimensionali. La (22) può scriversi come

$$q^+ - q^* = a(1-2\xi) \qquad (23)$$

che rappresenta la differenza tra i flussi nei casi adimensionali con/senza generazione. Ritornando al dimensionale

$$\dot Q - \dot Q^* = -\left(\frac{\cancel{L}-2x}{\cancel{L}}\right)\cancel{k}A\frac{\cancel{\Delta T_{rif}}}{\cancel{L}}\frac{\cancel{L^2}u_{gen}}{2\cancel{\Delta T_{rif}}\cancel{k}} =$$

$$= -(L-2x)A\frac{u_{gen}}{2} \quad \begin{cases} x=0 \rightarrow -u_{gen}A\frac{L}{2} \\ x=L \rightarrow +u_{gen}A\frac{L}{2} \end{cases}$$

che coincidono con la (9) e con la (10)

Infine, si cerca ϑ_{max} -

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} = -2a\xi + 1 + a = 0 \rightarrow \xi_{max} = \frac{1+a}{2a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a}$$

$T_0 > T_L \Rightarrow a < 0$ quindi il max si discosta dalla mezzeria muovendosi verso la faccia più calda cioè verso $x = 0$ e viceversa se $a > 0$ -
Osservazione già fatta -

$$\vartheta_{max} = \vartheta(\xi_{max}) = -a\left(\frac{1+a}{2a}\right)^2 + (1+a)\,\frac{1+a}{2a} =$$

$$= -a\left(\frac{1+a}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1+a}{2a}\right)^2 2a = a\left(\frac{1+a}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(\frac{1+a}{2}\right)^2$$

Passando ai valori numerici

$$T_{max} = T_0 + \vartheta_{max}\,(T_L - T_0) = 114\ °C$$

$$x_{max} = \xi_{max}\,L = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(-2.38)}\right) 0,1 = 0,29\ m$$

$$Q = q^+ Q_{rif} = \left(-\frac{kA}{L}\,\Delta T_{rif}\right)\cdot\left(1 + (-2,38)(1 - 2\xi)\right) =$$

$$= 840\,(1 - 2,38\,(1 - 2\xi))$$

$$Q^{usc}_{x=0} = -840\,(1 - 2,38) = +1160\ W$$

$$Q^{usc}_{x=L} = 840\,(1 - 2.38\,(1 - 2)) = 2840\ W$$

Ovviamente si tratta dei risultati trovati già in precedente -