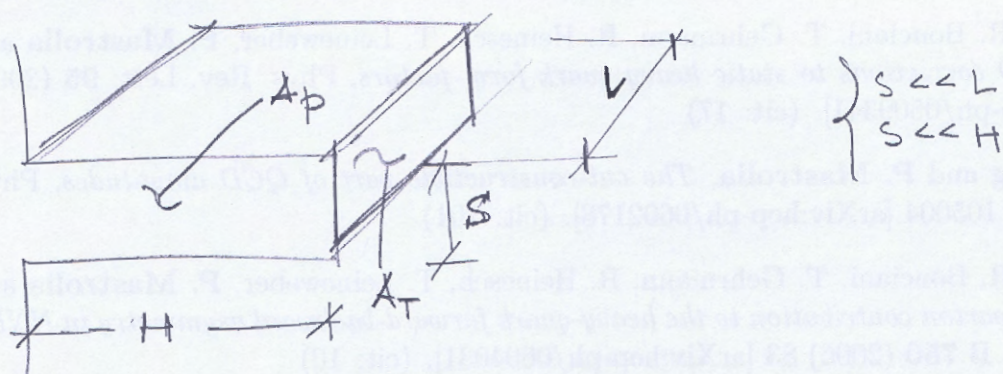


Si ricercano le dimensioni tali per cui il profilo di un'aletta rettangolare sia in grado di dissipare la massima potenza termica - La quantità di materiale da impiegare è prefissata, cosicchè risulti anche che l'area A_p del profilo laterale è costante: $A_p = H \times s = \text{costante}$, cfr. figure -



Nell'ipotesi di alette adiabatiche all'estremo libero, la potenza scambiata è esprimibile come:

$$\dot{Q} = \sqrt{k A_T h P} \Delta T_{rif} \tanh\left(\frac{H}{L_\infty}\right) \quad (1)$$

nel caso di alette rettangolare è

$$P \approx 2L; \quad A_T = L \cdot s; \quad L_\infty = \left(\frac{k}{h} \frac{A_T}{P}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{k}{h} \frac{s}{2}\right)^{1/2} \Rightarrow$$

L_∞ si può esprimere in termini di H ; essendo $s = A_p/H$ è

$$L_\infty = \left(\frac{k}{h} \frac{A_p}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{H^{1/2}} \quad (2)$$

Parimenti, $A_T = L \cdot s = L \frac{A_p}{H}$ consente di esprimere il termine sotto radice nelle (1) in termini di H ; pertanto la (1) può esprimersi in dipendenza

dell'unica incognita H

$$\dot{Q} = L \sqrt{\frac{2hkA_p}{\sqrt{H}}} \Delta T_{\text{rif}} \tanh \left[\frac{H}{L_{\infty}} \right] \quad (3)$$

quest'equazione si può compattare introducendo la nuova variabile indipendente β definita come

$$\beta = \beta(H) = \frac{H}{L_{\infty}} = \frac{H^{3/2}}{(kA_p k)^{1/2}} (2h)^{1/2} \quad (4)$$

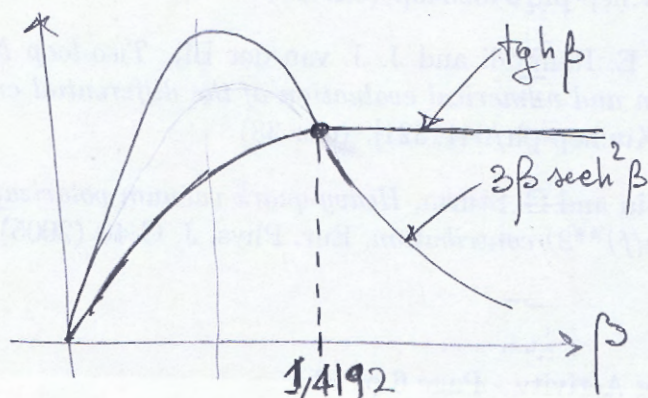
Quindi la (3) si riscrive in termini di β

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{L (2hkA_p)^{1/2} (2h)^{1/6} \Delta T_{\text{rif}} \tanh \beta}{\beta^{1/3} (kA_p k)^{1/6}} = \\ &= \text{costante} \cdot \frac{\tanh \beta}{\beta^{1/3}} = (2h)^{2/3} (kA_p)^{1/3} L \Delta T_{\text{rif}} \frac{\tanh \beta}{\beta^{1/3}} \quad (4^*) \end{aligned}$$

Derivando e ponendo uguale a zero segue

$$\frac{d\dot{Q}}{d\beta} = 0 \Rightarrow \boxed{3\beta \operatorname{sech}^2 \beta = \tanh \beta} \quad (5)$$

L'equazione trascendente è qualitativamente riportata in figura ed ammette come soluzione



$$\beta_0 = 1.4192 \quad (6)$$

per cui dalla (4) segue

$$H_{\text{ottimo}} = \left(\frac{A_p k}{2h} \right)^{1/3} 1.4192^{2/3} \quad (7)$$

ovvero

$$H_{\text{ottimo}} \approx \left(\frac{k A_p}{h} \right)^{1/3} \quad (8)$$

$$S_{\text{ottimo}} \approx 0,997 \left(\frac{h}{k} \right)^{1/3} A_p^{2/3} \quad (9)$$

Dalla (4*) può infine ottenersi $\frac{\dot{Q}_{\text{opt}}}{L} = 0,79 (2h)^{2/3} (k A_p)^{1/3} \Delta T_{\text{mf}} \quad (10)$

Esempio

Avendo prefissato $A_p = 4 \times 10^{-5} \text{ m}^2$, si trovi lo spessore ottimale e la potenza dissipata per unità di lunghezza ($L = 1 \text{ m}$) di un'alette longitudinali a profilo rettangolare sapendo che $h = 8 \text{ W/m}^2\text{K}$, $k = 30 \text{ W/mK}$; $\Delta T_{\text{mf}} = 60^\circ\text{C}$ -

Facendo riferimento alle (8) e (9) si trova subito

$$\begin{cases} H_{\text{opt}} = 53,2 \text{ mm} \\ S_{\text{opt}} = 0,75 \text{ mm} \end{cases}$$

Si noti che $L_{\infty} = 37,5 \text{ mm}$ e quindi l'efficienza è

$$\eta_{\text{opt}} = \frac{T_{\text{gh}} [\beta_{\text{opt}}]}{\beta_{\text{opt}}} \approx 0,63 \quad (10)$$

Per cui

$$\dot{Q}_{\text{opt}} = \eta_{\text{opt}} \cdot h (2 L H_{\text{opt}}) \Delta T_{\text{mf}} = 32,04 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

Lo stesso risultato si ottiene con la (10)